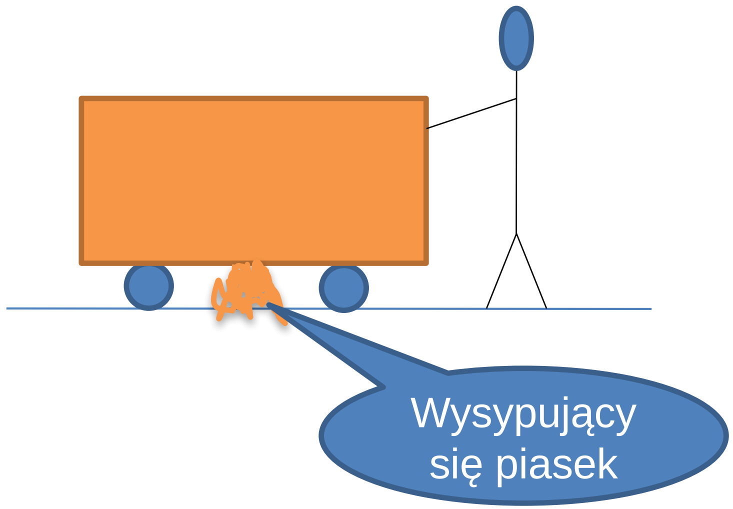
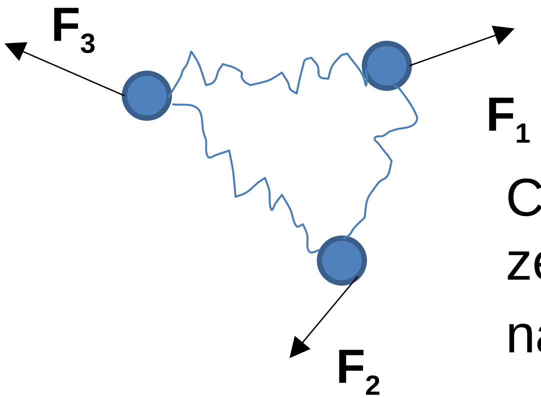
Fizyka1A – NS
Wykład #4

Janusz Andrzejewski

Problemy



Człowiek pcha wózek ze stała siłą **F.**
Jak policzyć przyśpieszenie **a** wózka ?



Ciała jakoś oddziałują miedzy sobą. Czy znając zewnętrzne siły $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ oraz $\mathbf{F_3}$ możemy coś powiedzieć na temat ruchu tych ciał?

II zasada dynamiki

Druga zasada dynamiki Newtona w postaci „klasycznej”

$$F_{Wyp} = ma$$

Zależność słuszna dla ciał których masa jest stała, **m = const**

$$\vec{F}_{Wyp} = m\frac{dv}{dt} \xrightarrow{m=const} m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

$$\vec{F}_{Wyp} = \frac{dp}{dt}$$ gdzie $p = mv$ **pęd cząstki**

Pęd - wielkość wektorowa, równa iloczynowi masy i prędkości ciała.

II zasada dynamiki:

Szybkość zmian pędu cząstki jest równa wypadkowej sił działających na cząstkę i ma kierunek tej siły.

Pęd i popęd

$$\boldsymbol{F} = \Delta \boldsymbol{p}/\Delta t$$

$$\underbrace{\boldsymbol{F}\,\Delta t}_{\text{popęd siły}} = \underbrace{\Delta \boldsymbol{p}}_{\text{zmiana pędu}}$$

„Siła wypadkowa pomnożona przez czas jej działania na dane ciało równa jest zmianie pędu tego ciała”

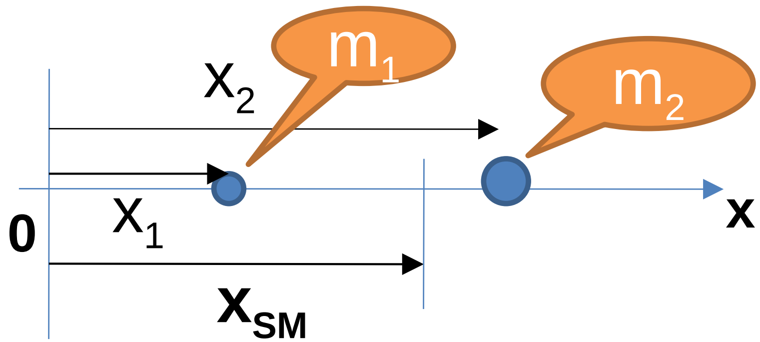
„Popęd siły wypadkowej działającej na dane ciało równy jest zmianie pędu tego ciała.”

Zmiana pędu

$F \Delta t$

$F \Delta t$

Środek masy



$$x_{SM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_u}$$

$$m_u = m_1 + m_2$$ masa układu

Położenie środka masy – jest średnią ważoną położeń punktów materialnych wchodzących w skład układu, przy czym „wagą" jest masa danego punktu materialnego

Środek masy – n cząstek

$$x_{SM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{m_u} = \frac{1}{m_u}\sum_i m_i x_i \qquad m_u = \sum m_i$$

W 3D:

$$x_{SM} = \frac{1}{m_u}\sum_i m_i x_i \qquad y_{SM} = \frac{1}{m_u}\sum_i m_i y_i \qquad z_{SM} = \frac{1}{m_u}\sum_i m_i z_i$$

$$r_{SM} = \hat{i} x_{SM} + \hat{j} y_{SM} + \hat{k} z_{SM}$$

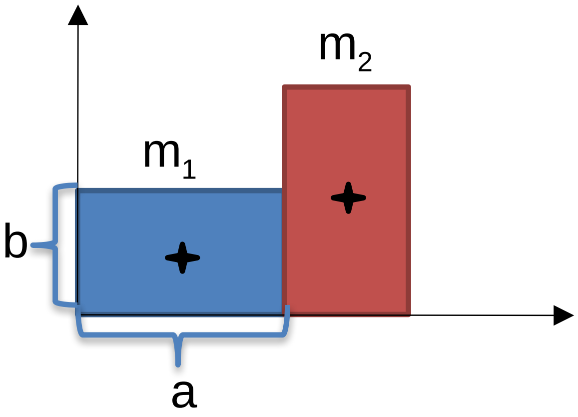
W skrócie, możemy zapisać $\vec{r} = \frac{1}{m_u}\sum m_i \vec{r}_i$

Środek masy układu punktów materialnych zależy tylko od mas tych punktów i od ich wzajemnego rozmieszczenia, nie zależy natomiast od wyboru układu współrzędnych.

Środek masy – własności

Środek masy nie musi leżeć w obrębie tego układu.

Środek masy jest addytywny



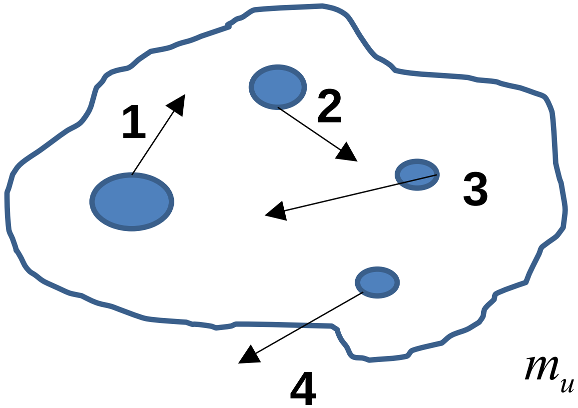
Środki masy prostokątów: m_1 oraz m_2

$$x_1 = a/2 \qquad x_2 = b/2$$

$$y_1 = b/2 \qquad y_2 = a/2$$

$$x_{SM} = \frac{m_1 \cdot a/2 + m_2 \cdot (b/2 + a)}{m_1 + m_2} \qquad y_{SM} = \frac{m_1 \cdot b/2 + m_2 \cdot a/2}{m_1 + m_2}$$

Ruch środka masy



$$m_u r_{SM} = \sum m_i r_i = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots + m_n r_n$$

Różniczkując obustronnie po czasie otrzymamy:

$$m_u \frac{dr_{SM}}{dt} = m_1 \frac{dr_1}{dt} + m_2 \frac{dr_2}{dt} + \ldots + m_n \frac{dr_n}{dt} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \ldots + m_n \vec{v}_n$$

Różniczkując ponownie obustronnie po czasie otrzymamy:

$$m_u \frac{dv_{SM}}{dt} = m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} + \ldots + m_n \frac{dv_n}{dt} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \ldots + m_n \vec{a}_n$$

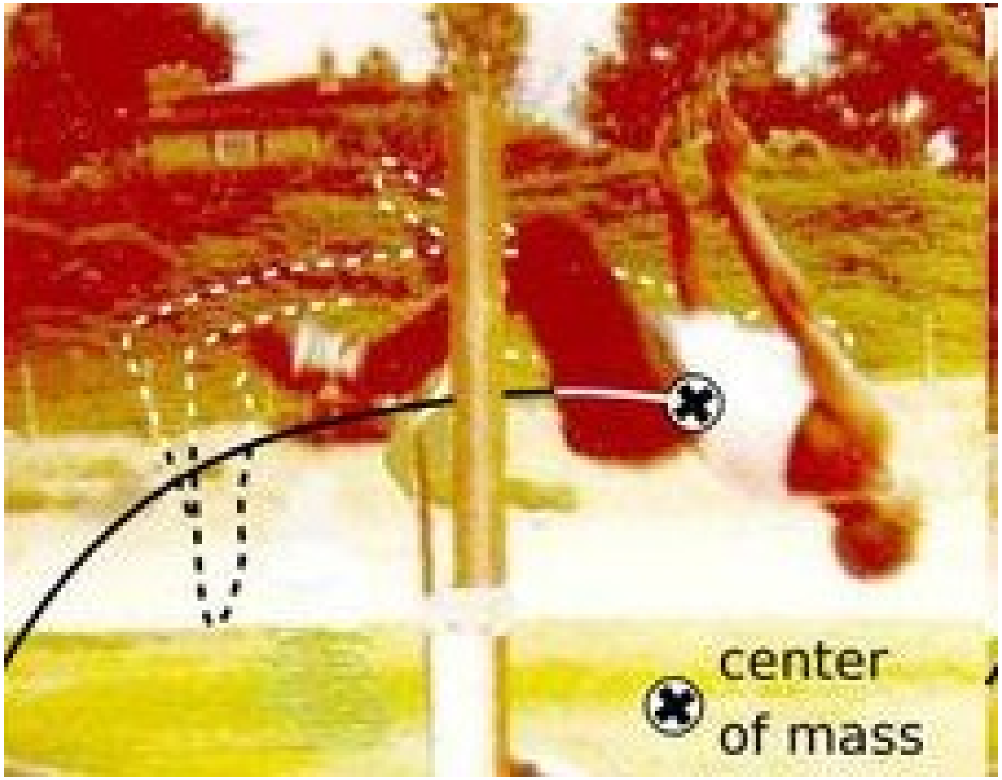
Z 2 zasady dynamiki mamy: $m_i a_i = F_i$

gdzie, F_i – zewnętrzna siła działająca na i-te ciało

$$m_u a_{SM} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{ZEW}$$

Środek masy ciała lub układu ciał to punkt, który porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona cała masa układu, a wszystkie siły zewnętrzne były przyłożone w tym punkcie.

Skok wzwyż



Skok wzwyż techniką Fosbury flop - środek masy przechodzi *pod* porzeczką

Środek masy a pęd

$$m_u r_{SM} = \sum m_i r_i = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots + m_n r_n$$

Różniczkując obustronnie po czasie otrzymamy:

$$m_u \frac{dr_{SM}}{dt} = m_1 \frac{dr_1}{dt} + m_2 \frac{dr_2}{dt} + \ldots + m_n \frac{dr_n}{dt} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \ldots + m_n \vec{v}_n$$

Definiując:

$$v_{SM} = \frac{dr_{SM}}{dt}$$

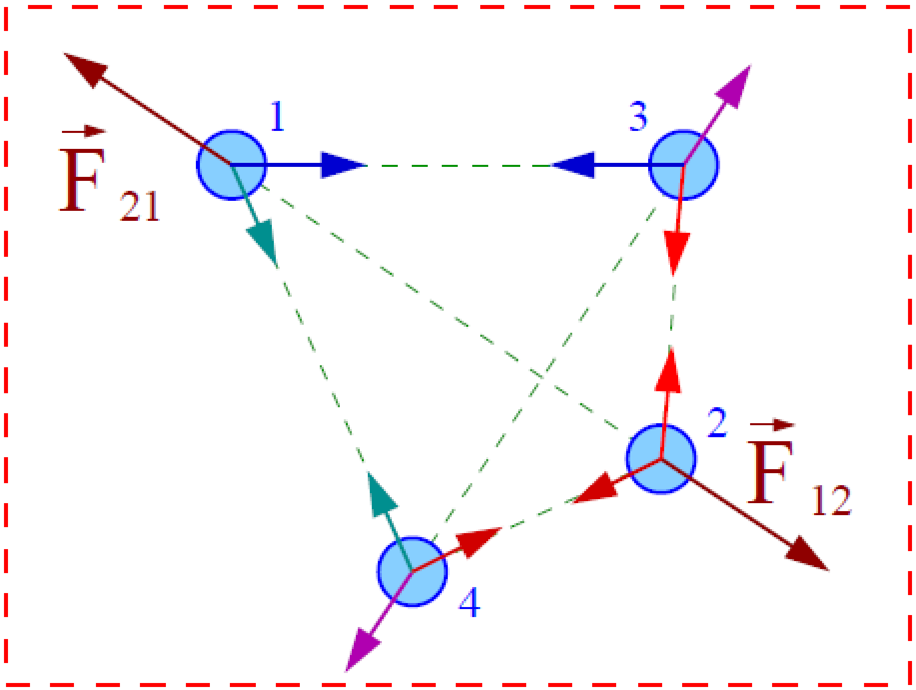
$$\overbrace{p_{SM} = m_u v_{SM}}^{\text{Pęd środka masy}} \qquad p_i = m_i v_i$$

$$p_{SM} = \underbrace{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}_{\text{pęd układu cząstek}}$$

Pęd układu cząstek jest równy pędowi środka masy

Zasada zachowania pędu

Układ izolowany - brak oddziaływań ze światem zewnętrznym



Każde ciało może w dowolny
Sposób oddziaływać z innymi
elementami układu.

Trzeci zasada dynamiki

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Siła działająca na ciało i-te

$$\vec{F}_i^{\Sigma} = \sum_j \vec{F}_{ji}$$

Całkowita siła działająca na układ:

$$\vec{F}_{Tot} = \sum_i \vec{F}_i^{\Sigma} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} = \sum_i \sum_j -\vec{F}_{ij} =$$

$$= -\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{Tot}$$

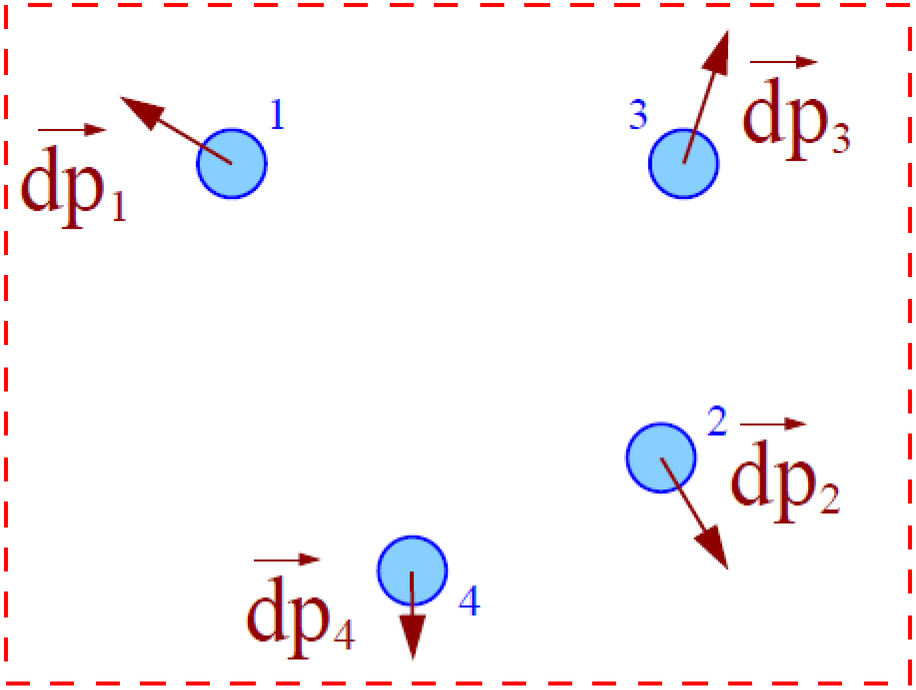
Czyli: $\vec{F}_{Tot} = -\vec{F}_{Tot} \Rightarrow \vec{F}_{Tot} = 0$

Dla układu izolowanego wypadkowa siła działająca na układ wynosi zero.

Zasada zachowania pędu

II zasada dynamiki dla cząstki i-tej

$$\frac{dp_i}{dt} = \vec{F}_i^{\Sigma}$$



Izolowany układ inercjalny

Pęd układu izolowanego:

$$\vec{F}_{Tot} = \sum_i \vec{F}_i^{\Sigma} = \sum_i \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i$$

Dla układu izolowanego:

$F_{Tot} = 0$ czyli

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = const$$

Dla dowolnego układu izolowanego, suma pędów wszystkich elementów układu pozostaje stała.

Zasada zachowania pędu

Pęd układ(definicja): $\mathbf{P} = \sum_i p_i$ (suma wektorowa!!)

Jeżeli układ jest izolowany (nie działają siły zewnętrzne) i zamknięty (cząstki nie przybywają i nie ubywają):

$\boldsymbol{F}_{wyp} = d\boldsymbol{P}/dt = 0$ pęd układu się nie zmienia!

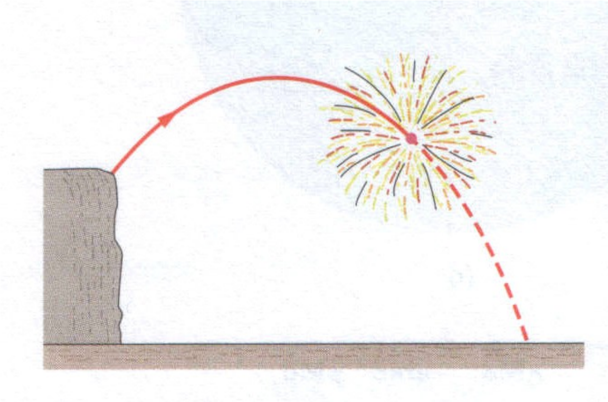
Inny zapis:

$\boldsymbol{P} = \mathrm{const}$ lub $\boldsymbol{P}_{pocz} = \boldsymbol{P}_{ko\acute{n}c}$

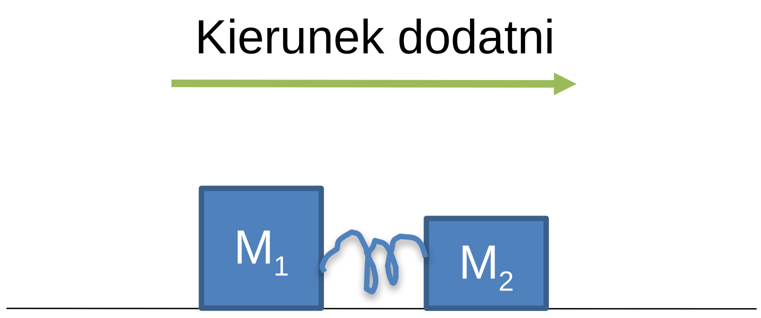
Zasada zachowania pędu:

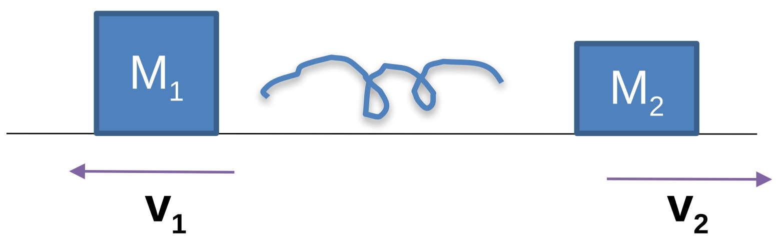
Jeżeli na układ cząstek nie działają siły zewnętrzne lub ich wypadkowa jest równa zeru, to całkowity pęd P układu nie ulega zmianie.

Zasada zachowania pędu - przykłady



Zasada zachowania pędu – przykład 1





Nie ma sił tarcia oraz układ rozpada się tylko pod wpływem sił wewnętrznych

Jeśli na początku układ spoczywa to:

$$\sum_i p_i = 0$$

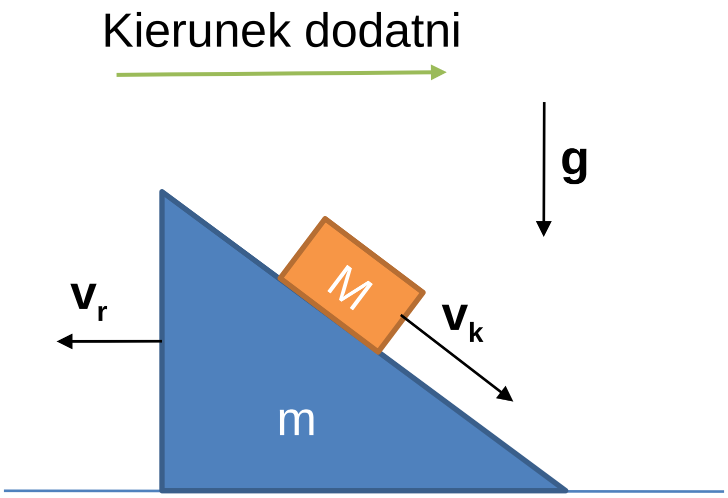
To i po rozpadzie pęd całkowity wynosi zero

$$0 = -M_1 v_1 + M_2 v_2$$

$$M_1 v_1 = M_2 v_2$$

$$v_1 = v_2 \frac{M_2}{M_1}$$

Zasada zachowania pędu – przykład 2



Równia rusza się bez tarcia po poziomym stole.
Na równi kładziemy klocek, który może zsuwać
się bez tarcia.

Jeśli masa klocka nie jest zaniedbywalna w porównaniu z masą równi to równia będzie „uciekać" spod zsuwającego się klocka. Wynika to z zasady zachowania pędu!

Siły zewnętrzne (siła ciężkości i reakcji stołu) mają kierunek pionowy => mogą zmieniać tylko składową pionową pędu układu równia-klocek.
Składowa pozioma pędu musi być zachowana!

$$-mv_r + Mv_x = 0$$

v_x – składowa pozioma v_k !!!

Zasada zachowania pędu – uwagi

- Jest zasadą zapisaną w postaci wektorowej => mamy 3 niezależne zasady zachowania pędu
- Pęd może być zachowany w jednym kierunku, a w kierunku prostopadłym pęd nie musi być zachowany
- Zasadę zachowania można stosować w przybliżeniu tj. gdy zewnętrzna siła jest „mała” (dokładniej gdy popęd siły jest mały w porównaniu z pędem początkowym)

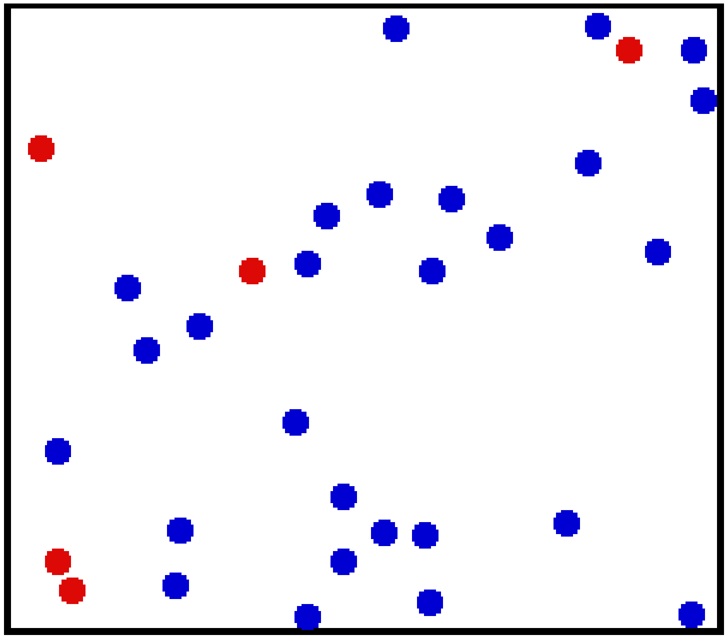
Zderzenia

Zderzenie zachodzi, gdy dwa lub więcej ciał działa na siebie stosunkowo dużymi siłami w stosunkowo krótkim czasie.

Zderzenia są „gwałtowne” i „szybkie”

Zderzenia sprężyste i niesprężyste

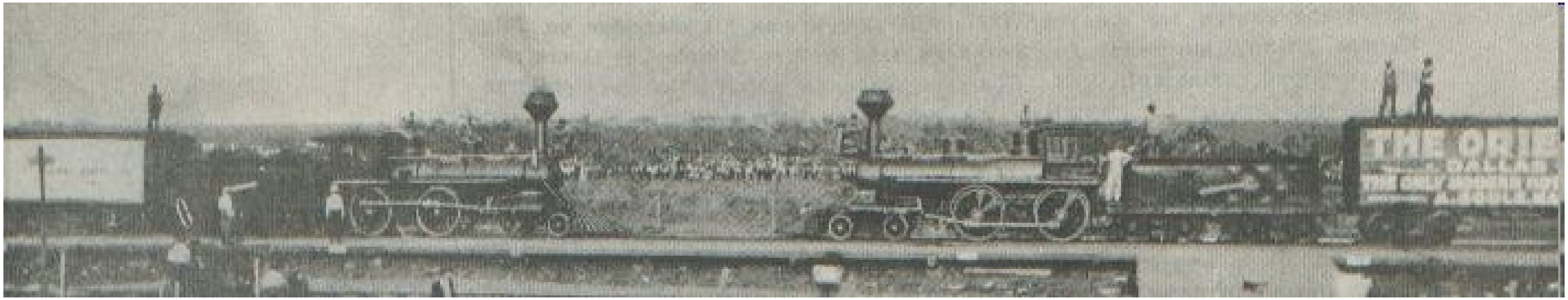
Zderzenie, w którym całkowita energia kinetyczna układu nie zmienia się w wyniku zderzenia, nazywane jest zderzeniem **sprężystym**.



Zderzenie sprężyste - jeśli działające siły mają charakter zachowawczy np. siły kulombowskie, siły sprężystości

Zderzenia sprężyste i niesprężyste

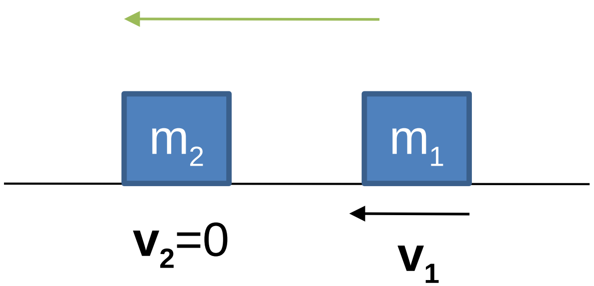
Zderzenie, w którym całkowita energia kinetyczna układu nie jest zachowana (zmienia się) w wyniku zderzenia, nazywane jest zderzeniem **niesprężystym.**



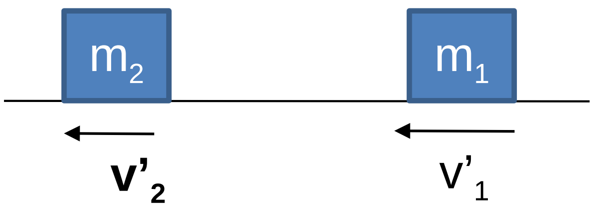
Zderzenie niesprężyste - jeśli mamy wkład sił niezachowawczych w wyniku zderzenia następują trwałe zmiany (np. odkształcenia) w zderzających się ciałach

Zderzenia sprężyste

Przed zderzeniem:



Po zderzeniu:



Z zasad zachowania:

$$m_1 v_1 + m_2 \cdot 0 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 0^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Przekształcając:

$$m_2 v_2' = m_1 (v_1 - v_2')$$

$$m_2 v_2'^2 = m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1')$$

Dzieląc stronami 2 przez 1 równanie mamy

$$v_2' = v_1 + v_1' \Rightarrow v_2' - v_1' = v_1$$

Wartość bezwzględna prędkości względnej (prędkości ciała 2 względem 1) przed i po zderzeniu jest taka sama

Zderzenia sprężyste

Mieliśmy:

$$m_2 v_2' = m_1 (v_1 - v_2')$$

$$v_2' = v_1 + v_1'$$

Przekształcając mamy:

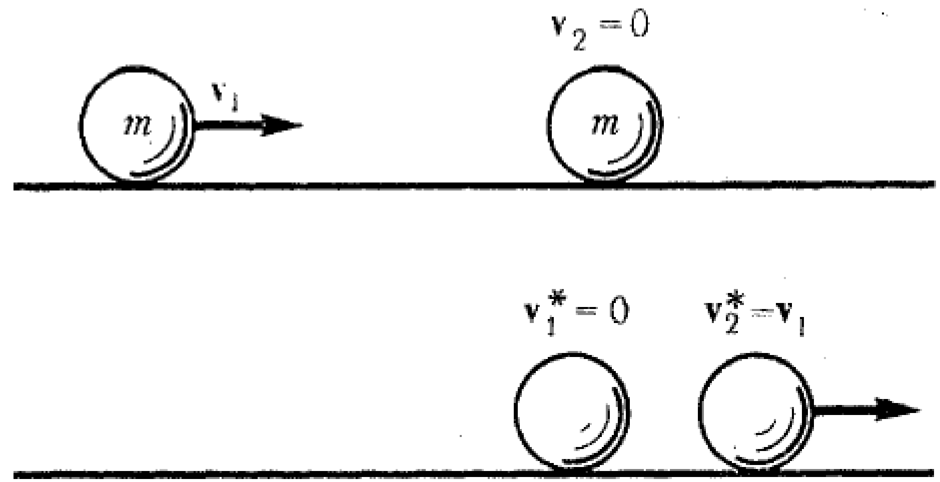
$$m_2 (v_1 + v_1') = m_1 (v_1 - v_2') \Rightarrow$$

$$v_1' (m_1 + m_2) = v_1 (m_1 - m_2)$$

Wyliczając mamy:

$$v_1' = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = v_1 + v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$



$$v_1' = v_2 = 0$$

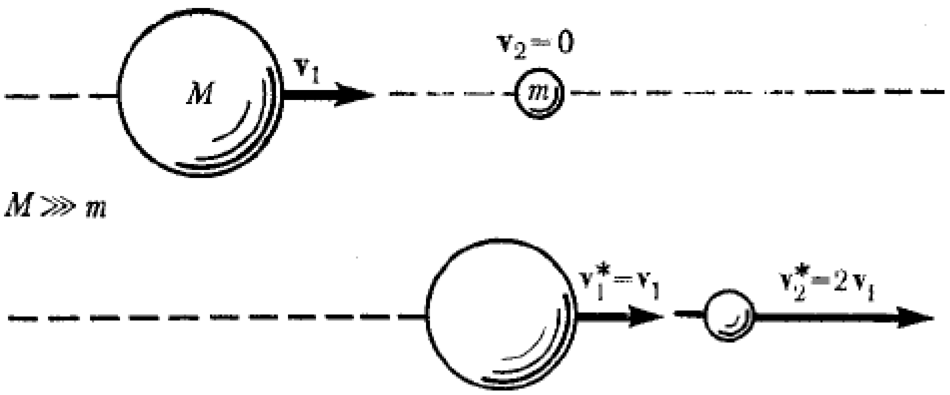
$$v_2' = v_1$$

Zderzające się ciała „wymieniają się ” prędkościami; rozwiązanie słuszne także w przypadku $v_2 \neq 0$

Zderzenia sprężyste

$m_1 > m_2$

Masa „pocisku” większa od masy „tarczy”:



Otrzymujemy: $v_2' > v_1' > 0$

Po zderzeniu oba ciała poruszają się w tą samą stronę.

Przypadek graniczny: **$m_1 \gg m_2$**

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 2 \cdot v_1$$

„Pocisk” nie zauważa zderzenia

„Tarcza” uzyskuje prędkość 2 $\cdot v_1$

Zderzenia sprężyste

$m_1 < m_2$

Masa „pocisku” mniejsza od masy „tarczy”:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 < 0$$

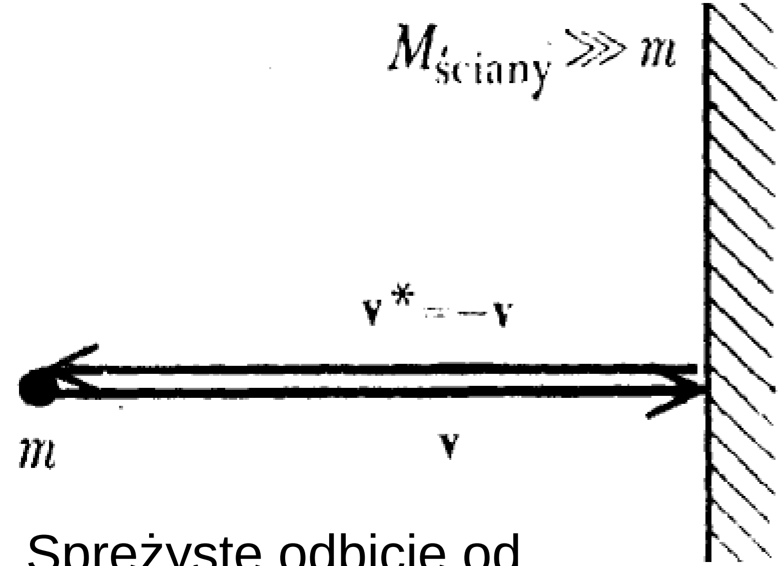
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 > 0$$

Prędkość „pocisku” zmienia znak => „pocisk” odbija się od „tarczy”

Przypadek graniczny: **$m_1 \ll m_2$**

$$v_1' = - v_1$$

$$v_2' = 0$$



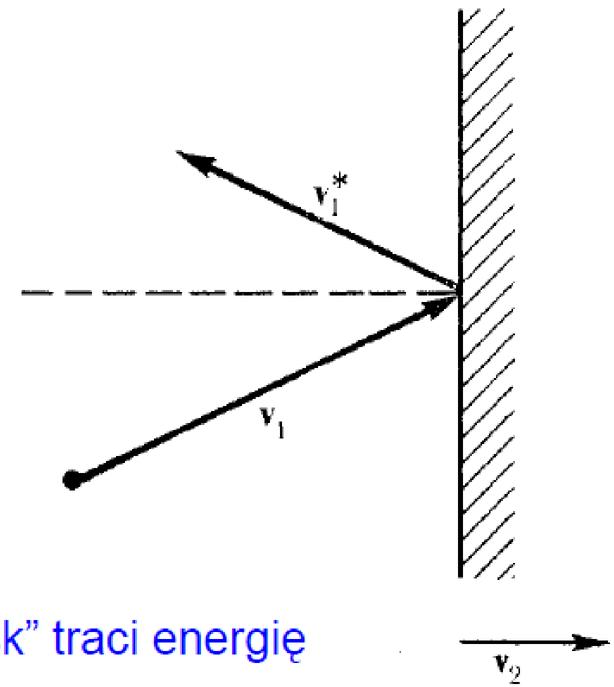
Sprężyste odbicie od nieruchomej „ściany”

Zderzenia

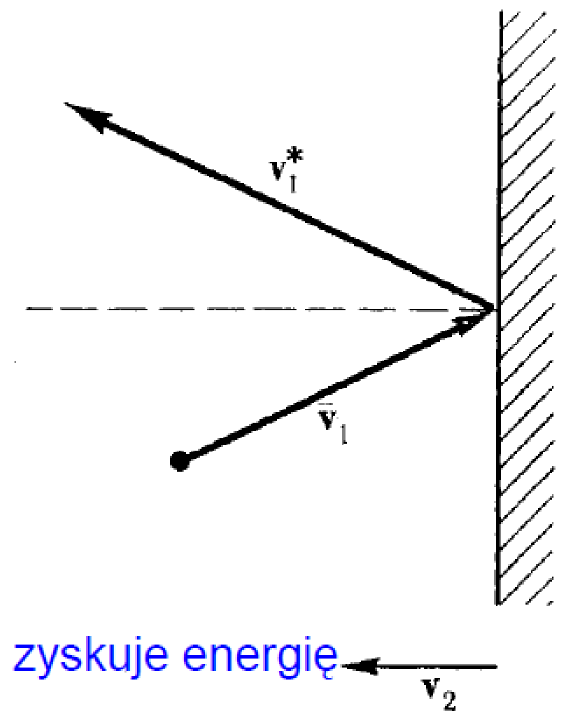
$m_1 << m_2$

„Tarcza” oddala się od „pocisku” (“´sciana”)

„Tarcza” przybliża się do „pocisku” („ściana”)



“pocisk” traci energię



“pocisk” zyskuje energię

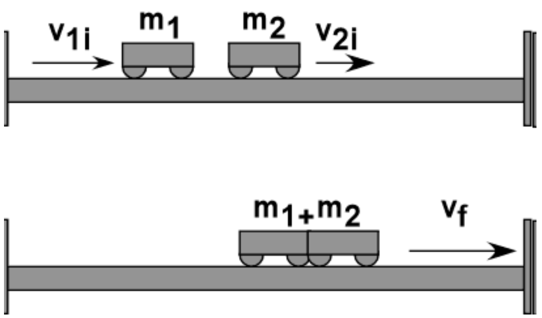
Mikroskopowy obraz ochładzania (ogrzewania) się gazu przy rozprężaniu (sprężaniu)

Zderzenia idealnie niesprężyste

Zasada zachowania pędu:

$p_{1pocz} + p_{2pocz} = p_{1końc} + p_{1końc}$

$m_1 v_{1pocz} + m_2 v_{2pocz} = m_1 v_{1końc} + m_2 v_{2końc}$



Niech przed zderzeniem m_2 pozostaje w spoczynku tzn. $v_{2pocz} = 0$. Wspólną prędkość przylegających do siebie ciał po zderzeniu oznaczmy V **(zderzenie idealnie niesprężyste)**.

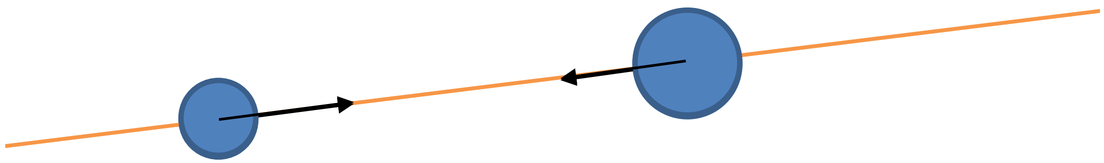
$$m_1 v_{1pocz} = (m_1 + m_2)V$$

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1pocz}$$

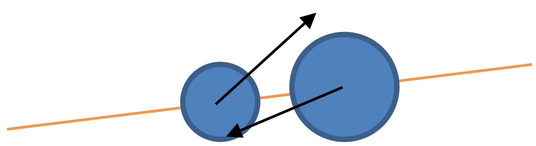
Wniosek: $V < v_{1pocz}$

Zderzenia centralne i niecentralne

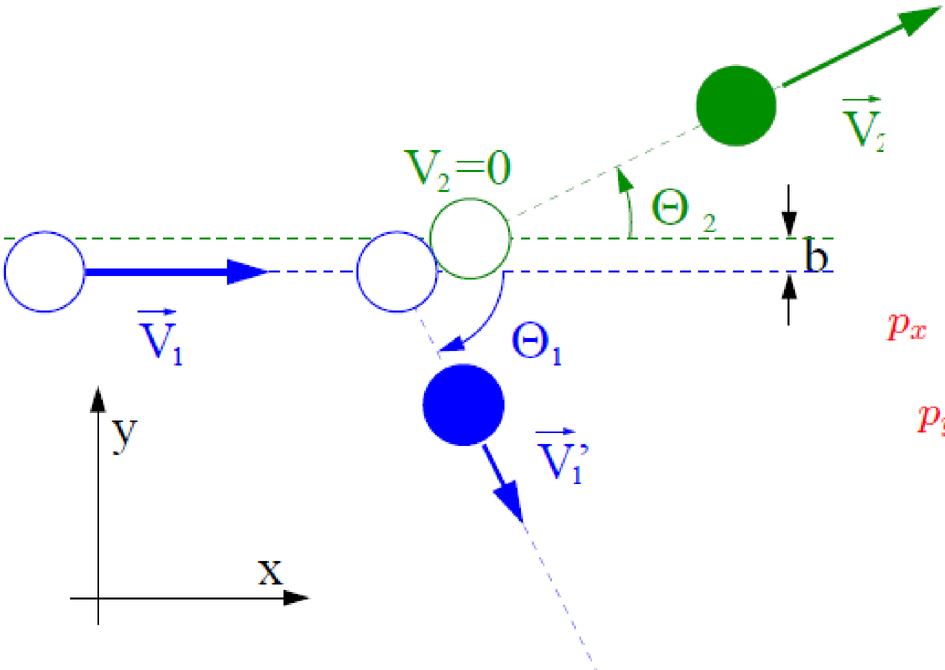
Zderzenia centralne(proste) – wtedy gdy prędkości przed zderzeniem się dwu ciał leżą na prostej łączącej środki tych ciał. W tym przypadku ruch można sprowadzić do ruchu wzdłuż jednej prostej łączącej środki tych ciał.



Zderzenie niecentralne – wektory prędkości poruszających się ciał nie leżą na jednej prostej łączącej środki poruszających się ciał.



Zderzenia niecentralne



Zasada zachowania pędu:

$$\begin{array}{lccccc} & \text{po zderzeniu} & & & & \text{przed} \\ p_x: & m_2 V_2' \cos\theta_2 & + & m_1 V_1' \cos\theta_1 & = & m_1 V_1 \\ p_y: & m_2 V_2' \sin\theta_2 & - & m_1 V_1' \sin\theta_1 & = & 0 \end{array}$$

Dla zderzeń spężystych:

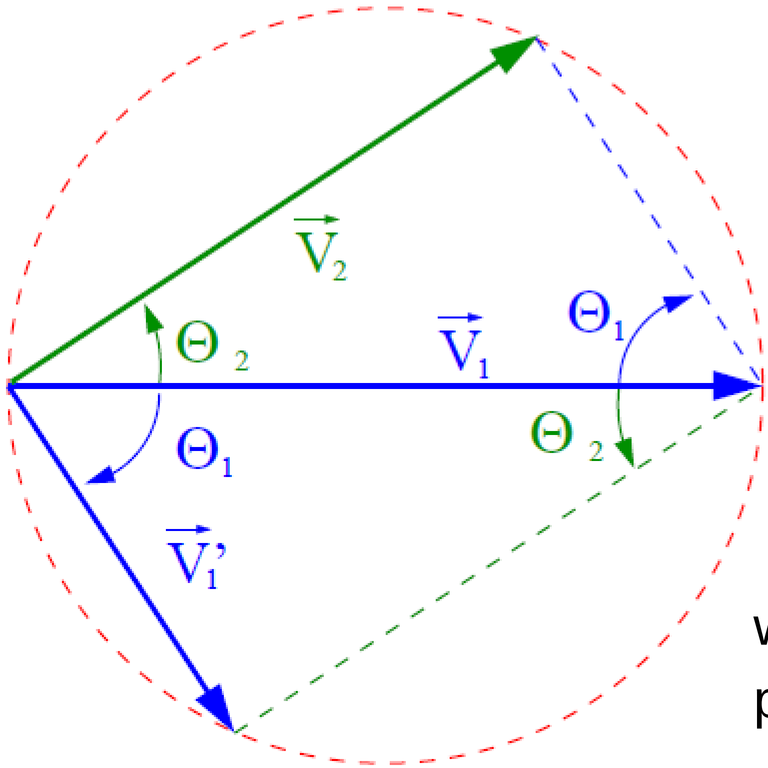
$$E_k: \quad \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Znajomość m_1, m_2 i v_1 ($v_2 = 0$) nie wystarcza do wyznaczenia pełnej kinematyki zderzenia (v_1‘, v_2‘, Θ_1 i Θ_2) !
=> musimy ustalić albo wartość b („odległość” między „środkami”) albo jeden z parametrów rozproszenia (np. kąt Θ_1).

Zderzenia niecentralne

Masy zderzających się ciał sa równne

$m_1 = m_2$



Z zasad zachowania:

$$v_1 = v_1' + v_2'$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

Podnosząc 1 równie do kwadratu mamy:

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2 \cdot v_1' \bullet v_2' + v_2'^2$$

Odejmując 2 równanie :

$$0 = 2 \cdot v_1' \bullet v_2'$$ czyli:

$$v_1' \bullet v_2' = 0 \Rightarrow \quad v_1' \perp v_2'$$

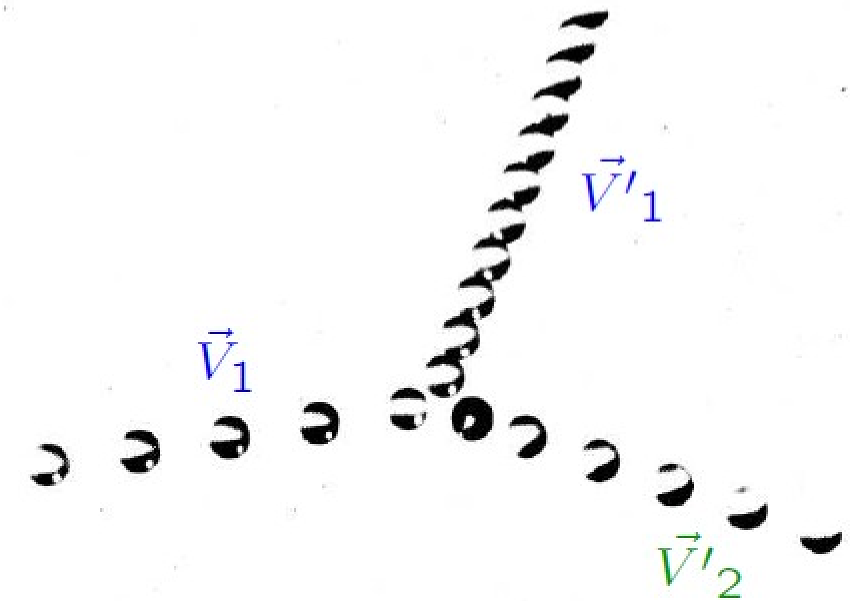
wektory v_1, v_1‘ i v_2‘ tworzą trójkąt prostokątny.

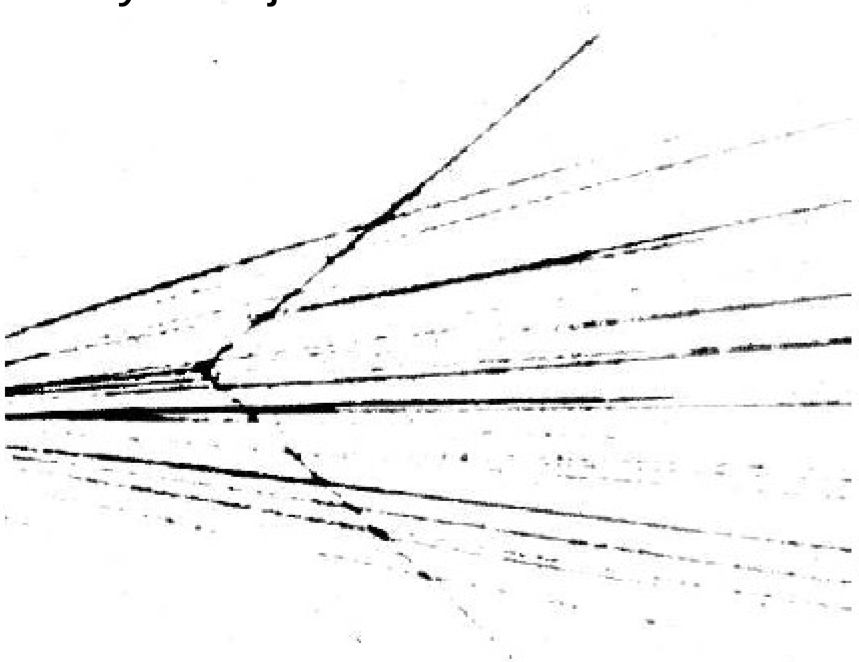
$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

Zderzenia niecentralne

Zderzenie proton-proton w komorze pęcherzykowej:

Fotografia zderzających się kul:





Dziękuję za uwagę.